5.31

$$\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial \sigma_j} = \sum_i \gamma_j(w_i)\left(\frac{1}{\sigma_j} - \frac{(w_i-\mu_j)^2}{\sigma_j^3}\right)$$ …(5.143) を求める。

ここで

$$\widetilde{E} = E + \lambda\Omega \quad \cdots(5.139)$$

$$(\sigma^{-2})' = (-2)\sigma^{-3}$$

$$\Omega = -\sum_i \ln\left(\sum_j \pi_j N(w_i|\mu_j, \sigma_j^2)\right) \quad \cdots(5.138)$$

$$N(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$ …ガウス分布

$$\frac{\partial N}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-1}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{-1}{2}(-2)\frac{1}{\sigma^3}(x-\mu)^2\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

$$= -\frac{1}{\sigma}N + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3}N = \left\{-\frac{1}{\sigma} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3}\right\}N$$ …ガウス分布をσで微分

なので

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_j} = -\sum_i \frac{\pi_j\left\{-\frac{1}{\sigma_j} + \frac{(w_i-\mu_j)^2}{\sigma_j^3}\right\}N(w_i|\mu_j, \sigma_j^2)}{\sum_j \pi_j N(w_i|\mu_j, \sigma_j^2)}$$

ここで

$$\gamma_j(w) = \frac{\pi_j N(w|\mu_j, \sigma_j^2)}{\sum_k \pi_k N(w|\mu_k, \sigma_k^2)} \quad \cdots(5.140)$$

なので

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_j} = \sum_i \gamma_j(w_i)\left\{\frac{1}{\sigma_j} - \frac{(w_i-\mu_j)^2}{\sigma_j^3}\right\}$$

また $\frac{\partial E}{\partial \sigma_j} = 0$ なので

$$\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial \sigma_j} = \lambda\sum_i \gamma_j(w_i)\left\{\frac{1}{\sigma_j} - \frac{(w_i-\mu_j)^2}{\sigma_j^3}\right\} \quad \cdots(5.143)$$

を得る。