5.37

ノートのタイトル 2015/03/03

(問) (5.158), (5.160) を確認しろ

$$E[t|x] = \int t\,p(t|x)\,dt = \sum_{k=1}^{K} \pi_k(x)\mu_k(x) \cdots (5.158)$$

$$\sigma^2(x) = E[\,\|t - E[t|x]\|^2 \,|\, x\,]$$

本文はLが抜けている

$$= \sum_{k=1}^{K} \pi_k(x)\left\{L\,\sigma_k^2(x) + \left\|\mu_k(x) - \sum_{l=1}^{K}\pi_l(x)\mu_l(x)\right\|^2\right\} \cdots (5.160)$$

$$p(t|x) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k(x) N(t|\mu_k(x), \sigma_k^2(x) I) \cdots (5.148)$$

より

$$E[t|x] = \int t\,p(t|x)\,dt = \int t \sum_{k=1}^{K} \pi_k(x) N(t|\mu_k(x), \sigma_k^2(x) I)\,dt$$

$$= \sum \pi_k \int t N(t|\mu_k, \sigma_k^2 I)\,dt = \sum \pi_k \mu_k \cdots (5.158)$$

を得る。

$$\underbrace{\int t N(t|\mu_k, \sigma_k^2 I)\,dt}_{} = \mu_k$$

← ガウス分布の平均を表わしているので

$$\sigma^2(x) = E[\,\|t - E[t|x]\|^2 \,|\, x\,]$$

$$= \int \|t - E[t|x]\|^2 p(t|x)\,dt$$

$$= \int \left\|t - \sum_l \pi_l \mu_l\right\|^2 \sum_k \pi_k N(t|\mu_k, \sigma_k^2)\,dt$$

$$= \sum \pi_k \int \left\{(t_1 - \sum \pi_l \mu_{l1})^2 + \cdots\right\} N(t|\mu_k, \sigma_k^2)\,dt$$

$$= \sum \pi_k \left[\int (t_1^2 + \cdots) N_k\,dt + \int -2(t_1 \sum \pi_l \mu_{l1} + \cdots) N_k\,dt + \int \left\{(\sum \pi_l \mu_{l1})^2 + \cdots\right\} N_k\,dt\right]$$

$$= \sum \pi_k \left\{\int \|t\|^2 N_k\,dt - 2\int t^T \sum \pi_l \mu_l N_k\,dt + \|\sum \pi_l \mu_l\|^2 \underbrace{\int N_k\,dt}_{=1}\right\} \cdots ①$$

ここで

$$\int t_1^2 N_k dt = \int t_1^2 \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\sigma_k^D} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma_k^2}\{(t_1-\mu_{k1})^2+\cdots\}\right] dt$$

$$= \underbrace{\int t_1^2 N(t_1|\mu_{k1},\sigma_k^2)\, dt_1}_{\text{1次元のガウス分布}} \times \underbrace{\int N(t_2|\mu_{k2},\sigma_k^2)\, dt_2}_{=1} \times \cdots$$

平均が0でないので σ_k^2 になるとは言えない

ここで

$$\int t_1^2 N(t_1|\mu_{k1},\sigma_k^2)\, dt_1 = \int t_1^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_k} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma_k^2}(t_1-\mu_{k1})^2\right\} dt_1$$

$$= \int (u_1+\mu_{k1})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_k} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma_k^2}u_1^2\right) du_1$$ ← $t_1-\mu_{k1}=u_1$ とおく

$$= \underbrace{\int u_1^2 N(u_1|0,\sigma_k^2)\, du_1}_{\text{分散なので}\sigma_k^2} + 2\mu_{k1}\underbrace{\int u_1 N(u_1|0,\sigma_k^2)\, du_1}_{\text{平均なので }0} + \mu_{k1}^2 \underbrace{\int N(u_1|0,\sigma_k^2)\, du_1}_{1}$$

$$= \sigma_k^2 + \mu_{k1}^2$$

ちゃんと計算すると

$$\int u_1^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_k} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma_k^2}u_1^2\right) du_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_k} \int u_1^2 \exp\left(\frac{-1}{2\sigma_k^2}u_1^2\right) du_1$$ $\frac{u_1}{\sqrt{2}\sigma_k}=v_1$ とおく

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_k} \int 2\sigma_k^2 v_1^2 \exp(-v_1^2)\sqrt{2}\sigma_k\, dv_1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma_k^2 \underbrace{\int v_1^2 \exp(-v_1^2)\, dv_1}_{\text{ガウス積分 } \int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(-x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \sigma_k^2$$

これより

$$\int |t|^2 N_k dt = \int (t_1^2+t_2^2+\cdots) N_k dt = D\sigma_k^2 + \mu_{k1}^2 + \mu_{k2}^2 + \cdots$$

$$= D\sigma_k^2 + |\mu_k|^2$$

ガウス分布の平均なので $\int t N_k dt = \mu_k$

スカラーなので $t^T(\Sigma\pi_\ell\mu_\ell) = (\Sigma\pi_\ell\mu_\ell)^T t$

また

$$\int t^T \Sigma\pi_\ell\mu_\ell N_k dt = (\Sigma\pi_\ell\mu_\ell)^T \int t N_k dt = (\Sigma\pi_\ell\mu_\ell)^T \mu_k$$

これらを① に入れて

$$s^2(x) = \Sigma\pi_k\{D\sigma_k^2 + |\mu_k|^2 - 2(\Sigma\pi_\ell\mu_\ell)^T\mu_k + |\Sigma\pi_\ell\mu_\ell|^2\}$$

$$= \Sigma\pi_k\{D\sigma_k^2 + |\mu_k - \Sigma\pi_\ell\mu_\ell|^2\} \cdots (5.160)$$

を得る。