5.39

ノートのタイトル 2015/04/03

問 (4.135)を用いて(5.175)を示す

$$p(z) = \frac{1}{Z} f(z)$$

のラプラス近似は

$$q(z) = N(z|z_0, A^{-1})$$

このとき

M は z の次元

$$Z = \int f(z) dz \simeq f(z_0) \frac{(2\pi)^{\frac{M}{2}}}{|A|^{\frac{1}{2}}} \quad \cdots (4.135)$$

$$f(w) = p(D|w, \beta) p(w|\alpha)$$

とすると

正規化係数

$$p(w|D, \alpha, \beta) = \frac{1}{V} f(w), \quad V = \int f(w) dw$$

である。$p(w|D, \alpha, \beta)$ のラプラス近似は

$$q(w|D) = N(w|w_{MAP}, A^{-1}) \quad \cdots (5.167)$$

である。このとき (4.135) より

$$V = f(w_{MAP}) \frac{(2\pi)^{\frac{W}{2}}}{|A|^{\frac{1}{2}}}$$

ここで

$$p(D|\alpha, \beta) = \int p(D|w, \beta) p(w|\alpha) dw = \int f(w) dw = V$$

なので

$$p(D|\alpha, \beta) = p(D|w_{MAP}, \beta) p(w_{MAP}|\alpha) \frac{(2\pi)^{\frac{W}{2}}}{|A|^{\frac{1}{2}}}$$

両辺の対数を取って

$$\ln p(D|\alpha,\beta) = \ln p(D|w_{MAP},\beta) + \ln p(w_{MAP}|\alpha) + \frac{W}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|A|$$

ここで

$$p(w|\alpha) = N(w|0,\alpha^{-1}I) \quad \cdots (5.162)$$

tは一次元なので分散はスカラーである

$$p(D|w,\beta) = \prod_{n=1}^{N} N(t_n|y(x_n,w),\beta^{-1}) \quad \cdots (5.163)$$

$$N(x|\mu,\Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}}\frac{1}{|\Sigma|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

なので

$$\ln p(D|\alpha,\beta) = \sum_{n=1}^{N}\ln N(t_n|y(x_n,w_{MAP}),\beta^{-1}) + \ln N(w_{MAP}|0,\alpha^{-1}I)$$

$$+ \frac{W}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|A|$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\ln\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{1}{\beta^{-1\cdot\frac{1}{2}}}\exp\left\{\frac{-1}{2\beta^{-1}}(t_n-y_n)^2\right\} + \ln\frac{1}{(2\pi)^{W/2}}\frac{1}{\underbrace{|\alpha^{-1}I|^{\frac{1}{2}}}_{(\alpha^{-W})^{\frac{1}{2}}}}\exp\left\{\frac{-1}{2\alpha^{-1}}w_{MAP}^T w_{MAP}\right\}$$

$$+ \frac{W}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|A|$$

$$= \frac{-N}{2}\ln(2\pi) + \frac{N}{2}\ln\beta - \frac{\beta}{2}\sum_{n=1}^{N}(t_n-y_n)^2 - \frac{W}{2}\ln(2\pi) + \frac{W}{2}\ln\alpha - \frac{\alpha}{2}w_{MAP}^T w_{MAP}$$

$$+ \frac{W}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|A|$$

$$= -\frac{\beta}{2}\sum_{n=1}^{N}(y_n-t_n)^2 - \frac{\alpha}{2}w_{MAP}^T w_{MAP} - \frac{1}{2}\ln|A| + \frac{W}{2}\ln\alpha + \frac{N}{2}\ln\beta - \frac{N}{2}\ln(2\pi)$$

$$= -E(w_{MAP}) - \frac{1}{2}\ln|A| + \frac{W}{2}\ln\alpha + \frac{N}{2}\ln\beta - \frac{N}{2}\ln(2\pi) \quad \cdots (5.175)$$

ただし

$$E(w_{MAP}) = \frac{\beta}{2}\sum_{n=1}^{N}(y_n-t_n)^2 + \frac{\alpha}{2}w_{MAP}^T w_{MAP} \quad \cdots (5.176)$$

を得る。