5.39

$$p(\mathcal{D}|\alpha,\beta)=\int p(\mathcal{D}|\mathbf{w},\beta)\,p(\mathbf{w}|\alpha)\,d\mathbf{w} \quad \cdots (5.174)$$

において、$f(\mathbf{w})=p(\mathcal{D}|\mathbf{w},\beta)\,p(\mathbf{w}|\alpha)$, $Z=p(\mathcal{D}|\alpha,\beta)$として
(4.135)を適用すると

$$p(\mathcal{D}|\alpha,\beta)=Z\simeq f(\mathbf{w}_{MAP})\frac{(2\pi)^{\frac{W}{2}}}{|\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}}}, \quad (W\text{は}\mathbf{w}\text{の次元})$$

となる。ここで

$$f(\mathbf{w}_{MAP})=p(\mathcal{D}|\mathbf{w}_{MAP},\beta)\,p(\mathbf{w}_{MAP}|\alpha)$$

$$=\prod_{n=1}^{N}\mathcal{N}(t_n|y(\mathbf{x}_n,\mathbf{w}_{MAP}),\underbrace{\beta^{-1}}_{(5.163)})\,\mathcal{N}(\mathbf{w}_{MAP}|\mathbf{0},\underbrace{\alpha^{-1}\mathbf{I}}_{(5.162)})$$

$$=\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(\beta^{-1})^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2\beta^{-1}}\{t_n-y(\mathbf{x}_n,\mathbf{w}_{MAP})\}^2\right]\frac{1}{(2\pi)^{\frac{W}{2}}}\frac{1}{|\alpha^{-1}\mathbf{I}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{w}_{MAP}^{T}(\alpha^{-1}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{w}_{MAP}\right\}$$

$$=\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{\beta}{2}\{t_n-y(\mathbf{x}_n,\mathbf{w}_{MAP})\}^2\right]\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{W}{2}}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\mathbf{w}_{MAP}^{T}\mathbf{w}_{MAP}\right)$$

$$(\alpha^{-1}\mathbf{I})^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha^{-1} & & 0\\ & \alpha^{-1} & \\ 0 & & \alpha^{-1}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha & & 0\\ & \alpha & \\ 0 & & \alpha\end{pmatrix}=\alpha\mathbf{I}$$

$$|\alpha^{-1}\mathbf{I}|=\left|\begin{pmatrix}\alpha^{-1} & & 0\\ & \alpha^{-1} & \\ 0 & & \alpha^{-1}\end{pmatrix}\right|=\alpha^{-W}$$

なので

$$\ln p(\mathcal{D}|\alpha,\beta)\simeq\ln f(\mathbf{w}_{MAP})+\frac{W}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln|\mathbf{A}|$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\{\ln\beta-\ln(2\pi)\}-\frac{\beta}{2}\{t_n-y(\mathbf{x}_n,\mathbf{w}_{MAP})\}^2\right]+\frac{W}{2}\{\ln\alpha-\ln(2\pi)\}-\frac{\alpha}{2}\mathbf{w}_{MAP}^{T}\mathbf{w}_{MAP}$$

$$+\frac{W}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln|\mathbf{A}|$$

$$=-\left[\frac{\beta}{2}\sum_{n=1}^{N}\{t_n-y(\mathbf{x}_n,\mathbf{w}_{MAP})\}^2+\frac{\alpha}{2}\mathbf{w}_{MAP}^{T}\mathbf{w}_{MAP}\right]-\frac{1}{2}\ln|\mathbf{A}|$$

$$+\frac{N}{2}\ln\beta-\frac{N}{2}\ln(2\pi)+\frac{W}{2}\ln\alpha$$

$$=-E(\mathbf{w}_{MAP})-\frac{1}{2}\ln|\mathbf{A}|+\frac{N}{2}\ln\beta-\frac{N}{2}\ln(2\pi)+\frac{W}{2}\ln\alpha \quad\cdots(5.175)$$

を得る。但し

$$E(\mathbf{w}_{MAP})=\frac{\beta}{2}\sum_{n=1}^{N}\{t_n-y(\mathbf{x}_n,\mathbf{w}_{MAP})\}^2+\frac{\alpha}{2}\mathbf{w}_{MAP}^{T}\mathbf{w}_{MAP} \quad\cdots(5.176)$$

とする。