5.41

αの周辺化尤度（αのエビデンス関数）は

$$p(D|\alpha) = \int p(D, w|\alpha)\, dw \quad \cdots \text{加法定理 (1.10)}$$

$$= \int \underbrace{p(D|w)}_{\text{wの尤度関数}}\ \underbrace{p(w|\alpha)}_{\text{wの事前分布}}\, dw \quad \cdots \text{乗法定理 (1.11)}$$

である。右辺の $f(w) = p(D|w)p(w|\alpha)$ をラプラス近似する。

・Dは観測値固定なので $p(D, w|\alpha)$ は w の分布になっている ただし正規化はされていない
・ラプラス近似にする根拠はない ラプラス近似が良い近似になっていると仮定してるだけ

このとき (4.135) より

$$p(D|\alpha) = \int f(w)\, dw$$

$$\simeq f(w_{MAP}) \frac{(2\pi)^{\frac{W}{2}}}{|A|^{\frac{1}{2}}}$$

となる。ただし W は w の次元，$A = -\nabla\nabla \ln f(w)\big|_{w=w_{MAP}}$ (4.132) である。

よって

$$\ln p(D|\alpha) = \ln f(w_{MAP}) + \frac{W}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|A|$$

ここで

$$\ln f(w_{MAP}) = \ln p(D|w_{MAP}) + \ln p(w_{MAP}|\alpha)$$

$$= -E(w_{MAP}) + \underbrace{\frac{\alpha}{2} w_{MAP}^T w_{MAP}}_{(5.182)} + \ln \underbrace{N(w_{MAP}|0, \alpha^{-1}I)}_{(5.162)}$$

$$= -E(w_{MAP}) + \frac{\alpha}{2} w_{MAP}^T w_{MAP} + \ln \frac{1}{(2\pi)^{\frac{W}{2}}} \frac{1}{|\alpha^{-1}I|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} w_{MAP}^T (\alpha^{-1}I)^{-1} w_{MAP}\right\}$$

$|\alpha^{-1}I| = \alpha^{-W}$

$$= -E(w_{MAP}) + \frac{\alpha}{2} w_{MAP}^T w_{MAP} - \frac{W}{2}\ln(2\pi) + \frac{W}{2}\ln\alpha - \frac{\alpha}{2} w_{MAP}^T w_{MAP}$$

$$= -E(w_{MAP}) - \frac{W}{2}\ln(2\pi) + \frac{W}{2}\ln\alpha$$

なので

$$\ln p(D|\alpha) = -E(w_{MAP}) - \frac{1}{2}\ln|A| + \frac{W}{2}\ln\alpha \quad \cdots (5.183)$$

を得る。